

文章编号:

## 基于全变差的彩色图像恢复快速算法

刘海英<sup>1</sup>, Wu-Sheng Lu<sup>2</sup>, 张承进<sup>1</sup>, 孟庆虎<sup>3,1\*</sup>

(1. 山东大学控制科学与工程学院, 济南 250011;

2. 加拿大维多利亚大学电气与计算机工程系, 英属哥伦比亚省 V8W 3P6;

3. 香港中文大学电子工程学系, 香港)

**摘要:** 数字图像在采集和传输过程中很容易被噪声污染或者出现不同程度的模糊现象, 这给图像的后期处理和应用经常带来相当大的困难. 本文基于交替最小化算法和新的二分法技术, 在全变差 (TV) 能量最小化的框架下, 提出一个具有自动选择最优均衡参数能力对彩色图像去除噪声及通道内和通道间模糊的算法. 实验结果表明, 由于所采用的二分法的快速收敛性, 本文所建议的算法可以很快确定最优均衡参数数值, 从而提高了算法的去噪声及去模糊能力及自适应能力.

**关键词:** 去噪; 去模糊; 全变差; 彩色图像;

**中图分类号:** TP391

**文献标识码:** A

## Fast Algorithm Based on Total Variation for Restoration of Color Images

Haiying Liu<sup>1</sup>, Wu-Sheng Lu<sup>2</sup>, Chengjin Zhang<sup>1</sup>, Max Q.-H. Meng<sup>3,1\*</sup>

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250011, China; 2. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Victoria, Victoria V8W 3P6, Canada; 3. Department of Electronic Engineering, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China)

**Abstract:** Digital images can readily be blurred in various degrees and contaminated by noise during the process of the acquisition and transmission. This inevitably leads to considerable difficulties for the subsequent processing and application of these degraded images. In this paper, an algorithm that combines an alternating minimization method with a new bisection technique for denoising and within-channel/cross-channel deblurring of the color images is proposed in a total variation (TV) energy minimization framework. Experimental results are presented to demonstrate that, due to the fast convergence of the bisection technique employed, the proposed algorithm is able to quickly determine optimal value of the regularization parameter, thus improve the algorithm's denoising and deblurring performance as well as adaptation ability.

**Key words:** denoising; deblurring; total variation; color image

数字图像的恢复是通过计算机处理, 对质量下降的图像加以重建或恢复的处理过程. Rudin, Osher 和 Fatemi (ROF)<sup>[1]</sup> 首次提出全变差 (TV, total

variation) 的概念, 并通过它把图像的去噪声问题建模成能量函数的最小化问题.

在近期文献中, 有许多方法可用来最小化全变差图像去噪模型的能量函数<sup>[2,3,4,5,6,7]</sup>, 其中大多数研

**收稿日期:** 2011-11-18

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (61174044)

**作者简介:** 刘海英(1976—), 女, 博士, E-mail: liuhaiying918@yahoo.com.cn; 孟庆虎(1962—), 男, 教授.

究集中在如何在去噪的同时能最大程度的保护图像纹理细节和提高算法收敛速度等方面. 这些算法遇到的一个共同问题就是对于均衡参数的选择, 均衡参数过小或者过大容易导致图像去噪去模糊程度不够或者过度 (视均衡参数在图像恢复模型中的位置而定). 所以, 发展一个具有均衡参数自动最优选择能力的去噪算法将会对提高算法的去噪性能及其自适应的增强具有重要的实用价值. 近年来, 不少作者对交替最小化方法及在图像处理中的应用进行研究<sup>[8]-[11]</sup>. 本文结合交替最小化方法及半二次正则化思想<sup>[8]</sup>, 提出一个新的二分法技术来实现自动寻找最优的均衡参数值, 并扩展到彩色图像去噪及去模糊问题.

## 1 全变差彩色图像恢复

### 1.1 最小化全变差图像模型

不失一般性, 考虑具有 3 个通道, 尺寸为  $n_1 \times n_2$  的彩色数字图像并将每一个图像分量转换成一个等价的列向量  $\mathbf{u}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 \times 1}$ . 因此, 一个 3 通道的数字图像可以表示为一个  $3n_1 n_2$  维的列向量

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}^{(1)} \quad \mathbf{u}^{(2)} \quad \mathbf{u}^{(3)}]^T$$

文中考虑彩色数字图像的线性模型为:

$$\mathbf{u}_0 = \mathcal{A}\mathbf{u} + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中  $\mathcal{A}$  代表线性卷积算子,  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^{3n_1 n_2}$  代表观察到的含有噪声和被模糊的三通道彩色图像,  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3n_1 n_2}$  是正态分布的高斯白噪声. 图像的恢复问题即根据观察到的图像  $\mathbf{u}_0$ , 模糊算子  $\mathcal{A}$  和噪声  $\mathbf{n}$  统计特征 (例如噪声的均值和方差) 来估计或者恢复图像  $\mathbf{u}$ .

对彩色图像, ROF 模型中的最优化问题可写成

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \sum_{i=1}^{n_1 n_2} \|(I_3 \otimes D_i)\mathbf{u}\|_2 + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2 \quad (2)$$

这里  $\mu > 0$  是均衡参数,  $I_3$  是  $3 \times 3$  单位阵,  $\otimes$  代表矩阵的 Kronecker 积<sup>[9]</sup>,  $(I_3 \otimes D_i)\mathbf{u} \in \mathbb{R}^6$  代表所有 3 个通道像素  $i$  处的前向差分. 在 (2) 中  $\|(I_3 \otimes D_i)\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \|D_i \mathbf{u}^{(j)}\|_2^2}$ , 其中  $\|D_i \mathbf{u}^{(j)}\|_2$  代表通道  $j$  内的图像  $\mathbf{u}$  的各向同性全变差.

## 2 交替最小化算法

交替最小化 (AM, alternating minimization) 算法来源于最优化领域的变量分裂策略和惩罚机制<sup>[10]</sup>. 本文基于 AM 算法, 但是又和 AM 算法不同: AM 算法中, 均衡参数自始至终都是常数, 不随迭代的进行而自适应调整改变. 本文对此进行了改进, 使均衡参数  $\mu$  随着迭代的进行, 不断更新调整, 能够

快速找到最优解, 同时兼顾了保真项和全变差项的最优分配, 具有更强的自适应性和鲁棒性. 不失一般性, 将问题 (2) 修改为具有局部权值的模型:

$$\min_{\mathbf{u}} \sum_{i=1}^{n_1 n_2} \alpha_i \|(I_3 \otimes D_i)\mathbf{u}\|_2 + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2 \quad (3)$$

注意当  $\alpha_i = 1$  时, 问题 (3) 等价于 (2). 根据半二次正则化思想<sup>[8][10][11]</sup>, 问题 (3) 可以被近似为:

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{w}} \sum_{i=1}^{n_1 n_2} t_{1i} + t_{2i} + t_{3i} \quad (4)$$

其中,  $t_{1i} = \alpha_i \|\mathbf{w}_i\|_2$ ,  $t_{2i} = 0.5\beta \cdot \|\mathbf{w}_i - (I_3 \otimes D_i)\mathbf{u}\|_2$ ,  $t_{3i} = 0.5\mu \cdot \|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$ ,  $\beta$  是惩罚参数, 当  $\beta$  的取值愈大时,  $\mathbf{w}_i$  愈接近  $(I_3 \otimes D_i)\mathbf{u}$ , 因此问题 (4) 的解将会收敛于问题 (3) 的解.

## 3 最优均衡参数的确定

均衡参数  $\mu$  的选择在基于全变差的图像恢复算法中起着重要作用. 二分法技术的基本思想基于均衡参数和图像噪声方差存在的统计学关系, 利用模型 (1) 和问题 (2) 来推导二分法算法. 假设理想状态下, 恢复得到的最优图像  $\mathbf{u}$  解能够同原始图像完全一致, 那么从 (1) 知它应该满足以下公式:

$$\|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2 = \|\mathbf{n}\|_2^2 \approx 3n_1 n_2 \sigma^2 \quad (5)$$

其中  $\sigma^2$  代表每一个噪声分量的方差. 由问题 (3) 可知, 均衡参数  $\mu$  在图像的全变差范数和保真项即  $\mathcal{A}\mathbf{u}$  与  $\mathbf{u}_0$  差值的平方范数之间起着至关重要的平衡作用: 如果  $\mu$  选择过大, 会导致保真项  $\|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$  的权值过大,  $\|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$  小于  $3n_1 n_2 \sigma^2$ , 不能满足公式 (5); 如果  $\mu$  过小, 全变差范数将会具有相对较大权值,  $\|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$  大于  $3n_1 n_2 \sigma^2$ , 也不能满足 (5). 由分析可知,  $\|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$  是关于参数  $\mu$  的单调连续函数. 因此, 如果能确定参数  $\mu$  的一个区间  $[\mu_L, \mu_U]$ , 左端点  $\mu_L$  对应于  $\|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$  大于  $3n_1 n_2 \sigma^2$ , 右端点  $\mu_U$  对应于  $\|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$  小于  $3n_1 n_2 \sigma^2$ , 且该区间一定包含一个  $\mu$  值, 使和它对应的  $\|\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$  满足 (5), 最优  $\mu$  值用二分法来快速确定. 其具体步骤如下:

1. 初始化区间  $[\mu_L, \mu_U]$  确保最优  $\mu$  在此区间内, 设置循环终止条件  $\varepsilon$ , 令  $k = 1$ .
2. 设置  $\mu_k = 0.5(\mu_L + \mu_U)$ , 交替迭代求解 (4), 其中  $j = 1, 2, 3$  和  $\mathbf{u}_k = \{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}\}$ .
3. 若  $\|\mathcal{A}\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_0\|_2^2 > 3n_1 n_2 \sigma^2$ , 则  $\mu_U = \mu$ , 否则令  $\mu_L = \mu$ .
4. 如果  $\mu_U - \mu_L < \varepsilon$ , 输出  $\mu = 0.5(\mu_L + \mu_U)$ , 循环中止; 否则  $k = k + 1$ , 循环步骤 2.

下面对所提出的二分法技术再做两点说明:

(a)在每次迭代中, 区间 $[\mu_L, \mu_U]$ 的中点被取为下个区间的左端点. 若被取为新的 $\mu_L$ , 则新区间是上个区间的左边一半; 若被取为新的 $\mu_U$ , 新区间是上个区间的右边一半, 二分法在一次迭代后区间长度减少一半, 经过 $k$ 次迭代后区间长度等于初始区间长度除以 $2^k$ , 搜索区间量度从初始的 $\mu_U - \mu_L$ 减小到小于 $\varepsilon$ 所需要的迭代次数为 $k > \text{lb}((\mu_U - \mu_L) / \varepsilon)$ .

(b) 均衡参数初始区间确定: 因均衡参数始终是正值, 下界可以设为 $\mu_L = 0$ . 从(3)看出, 如果采用这个下界 $\mu_L = 0$ 求解(3), 相当于完全忽略了 $\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$ 的重要性, 得到的解使 $\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2$ 相当大, 即 $\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2 > 3n_1n_2\sigma^2$ . 初始区间上界的确定, 就是找到一个 $\mu$ 值, 使问题(3)的解 $\mathbf{u}$ 满足 $\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_2^2 < 3n_1n_2\sigma^2$ .

## 4 仿真结果

本文分别从彩色图像恢复的视觉效果、信噪比(SNR, signal-to-noise ratio)以及算法消耗时间来评价交替最小化结合二分法参数优化算法的性能. 算法被应用于传统图像 lena, 人工合成图像 pattern-text 以及自然图像 house. 图像尺寸均为 $256 \times 256$ , 并且进行了归一化预处理.

### 4.1 算法应用于通道内被模糊的图像

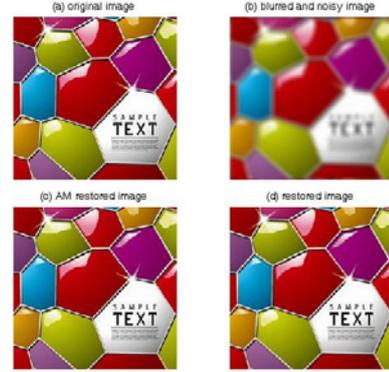
假定三个颜色通道模糊类型及参数, 并且通道之间的模糊效应小到可忽略不计. 实验图像假定均被方差 $\sigma_n$ 为 $10^{-4}$ 的高斯白噪声污染. 图像 lena 和 pattern-text, 初始区间取为 $[0, 7 \times 10^6]$ . 对室外图像 house 则取为 $[0, 9 \times 10^6]$ .

(a) 图像 lena, 算法进行两次迭代, 每次迭代中 $\mu$ 用二分法技术进行优化, 优化的参数值分别为 $\mu = 3.5 \times 10^6$ 和 $\mu = 1.75 \times 10^6$ , 耗时 3.0129 秒. 实验对比结果见图 1. 用 SNR 衡量图像品质的改善见表 1.



图 1 (a) 原始彩色 lena 图像; (b) 有噪声污染和模糊的图像; (c) AM 算法恢复的图像; (d) 结合 AM 算法和二分法恢复的图像;

(b) 图像 pattern-text, 算法每次迭代中均衡参数 $\mu$ 用二分法技术进行优化, 经过两次迭代, 优化的参数值分别为 $\mu = 5 \times 10^6$ 和 $\mu = 2.5 \times 10^6$ , 耗时 3.5272 秒. 实验对比结果见图 2. SNR 的改善见表 1.



(c) 图像 house, 算法共进行两次迭代, 每次迭代中均衡参数 $\mu$ 用二分法技术进行优化, 优化的参数值分别为 $\mu = 4.5 \times 10^6$ 和 $\mu = 2.25 \times 10^6$ . 算法耗时 3.2010 秒. 实验对比结果见图 3. SNR 的改善见表 1.

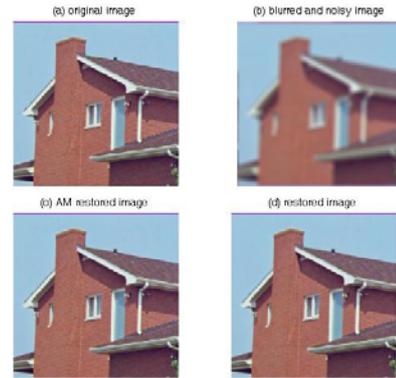


图 3 (a) 原始彩色 house 图像; (b) 有噪声污染和模糊的图像; (c) AM 算法恢复的图像; (d) 结合 AM 算法和二分法恢复的图像;

图像名称	信噪比 SNR (dB)		
	输入图像	AM 算法	AM 算法加二分法优化
lena	11.0414	25.8226	26.2813
pattern-text	7.1688	29.4893	31.0649
house	8.5911	21.7091	23.7523

表 1: 通道内仿真结果参数对比情况  
通过通道内图像模糊情况下仿真结果的视觉效果以及 SNR 数据得知, 本文算法性能优越于 AM 算法.

### 4.2 算法应用于通道间被模糊的图像

仿真实验使用与第 4.3 节相同的图像, 噪声类型及水平也相同.  $\mathbf{A}$  的具体形式如下:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.7\mathbf{M} & 0.15\mathbf{M} & 0.15\mathbf{M} \\ 0.15\mathbf{G} & 0.7\mathbf{G} & 0.15\mathbf{G} \\ 0.15\mathbf{A} & 0.15\mathbf{A} & 0.7\mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{M}$ 代表角度为按逆时针方向 $45^\circ$ , 11 个像素的线性运动模糊算子,  $\mathbf{G}$ 代表尺寸为 11, 方差为 9 的

高斯模糊算子， $\mathcal{A}$  代表尺寸为 13 的均值模糊算子。参数  $\mu$  的初始化区间均取为  $[0, 6 \times 10^7]$ 。

(a) 图像 lena, 改进的算法经过 4 次迭代, 最优  $\mu$  值为  $4.6875 \times 10^4$ , 算法耗时 16.6406 秒。试验对比结果见图 4。SNR 的改善见表 2。



图 4 (a) 原始彩色 lena 图像; (b) 模糊和被噪声污染的图像; (c) AM 算法恢复的图像; (d) 结合 AM 算法和二分化恢复的图像;

(b) 图像 pattern-text, 改进的算法经过 6 次迭代, 优化后的  $\mu$  值为  $9.375 \times 10^4$ , 算法耗时 16.0156 秒。实验对比结果见图 5。SNR 的改善列在表 2。

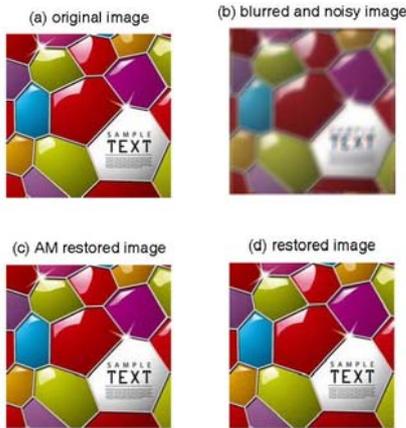


图 5 (a) 原始合成图像彩色 pattern-text 图像; (b) 模糊和被噪声污染的图像; (c) AM 算法恢复的图像; (d) 结合 AM 算法和二分化恢复的图像;

(c) 图像 house, 改进的算法经过 6 次迭代, 优化后的  $\mu$  值为  $9.375 \times 10^5$ , 算法耗时 14.8969 秒。实验对比结果见图 6。SNR 的改善列在表 2 中。

图像名称	信噪比 SNR (dB)		
	输入图像	AM 算法	AM 算法加二分化优化
lena	4.9511	18.2183	18.6598
pattern-text	2.5126	21.3364	21.4629
house	6.1066	26.5033	27.2326

表 2: 通道间仿真结果参数对比情况

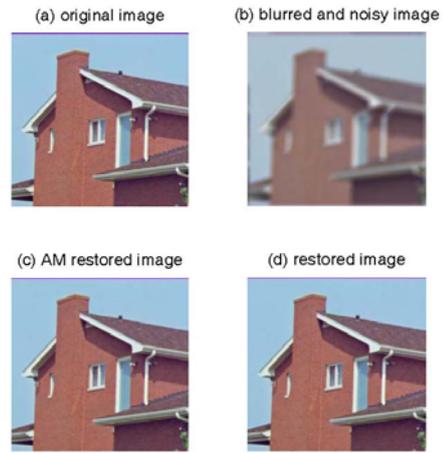


图 6 (a) 原始彩色 house 图像; (b) 模糊和被噪声污染的图像; (c) AM 算法恢复的图像; (d) 结合 AM 算法和二分化恢复的图像;

### 4.3 算法应用于彩色医学图像的统计结果

为验证算法的有效性, 从Gastrolab公共数据库<sup>[16]</sup>选取了 45 幅典型的无线胶囊内镜彩色医学图像, 图像尺寸均为  $100 \times 100$ , 模糊算子采用通道间模型(7)的形式, 分别利用AM算法和AM算法加二分化优化算法对图像进行恢复, SNR改善见表 3。实验结果表明, 参数优化后SNR平均值提高了 1.0569 dB。

平均信噪比 SNR (dB)		
输入医学图像	AM 算法	AM 算法加二分化优化
45 幅彩色图像	26.7743	25.7174

表 3: 彩色医学图像统计结果

从上述仿真的数值结果和视觉效果上的判别都肯定了所建议的算法对于改善被模糊和噪声污染的图像品质的有效性。

选取其中一幅比较典型的图像, 利用 AM 算法结合二分化优化技术共进行 2 次迭代, 优化后的  $\mu$  值为  $9.375 \times 10^5$ , 算法耗时 1.7813 秒。试验对比结果见图 7。参数优化后 SNR 提高了 1.1982dB。

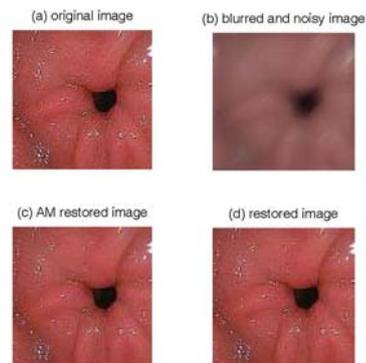


图 7 (a) 原始彩色医学图像; (b) 模糊和被噪声污染的图像; (c) AM 算法恢复的图像; (d) 结合 AM 算法和二分化恢复的图像;

---

## 5 结束语

本文在全变差最小化的框架下, 结合 AM 算法和二分法技术提出了一个对彩色图像去噪声及去模糊的新算法. 仿真结果表明, 本算法能快速优化均衡参数, 从而提高了算法的去噪声去模糊性能及自适应能力.

### 参考文献:

- [1] Rudin L I, Osher S, and Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60, (1-4): 259-268.
- [2] UCLA Computational and Applied Mathematics Reports: <http://www.math.ucla.edu/applied/cam/>
- [3] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1): 89-97.
- [4] Blomgren P and Chan T. Color TV: Total variation methods for restoration of vector valued images [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(3): 304-309.
- [5] Beck A and Teboulle M. A fast iterative shrinkage-threshold algorithm for linear inverse problems [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2: 183-202.
- [6] Beck A and Teboulle M. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems [J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 2009, 8(11):419-2434.
- [7] Jia R and Zhao H. A fast algorithm for the total variation model of image denoising [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2009: 1-11.
- [8] Yang J, Zhang Y, and Yin W. An efficient TVL1 algorithm for deblurring multichannel images corrupted by impulsive noise [J]. *SIAM Journal of Science of Computer*, 2009, 31(4): 2842-2865.
- [9] Yang J, Zhang Y, and Yin W. A fast alternating direction method for TVL1-L2 signed reconstruction from partial Fourier data [J], *IEEE J. Selected Topics in Signal Processing*, 4(2): 288-297, 2010.
- [10] Wen Z, Goldfarb D and Yin W. Alternating direction augmented Lagrangian methods for semidefinite programming [J], *Mathematical Programming Computation*, 2(3-4): 203-230, 2010.
- [11] Goldstein T, O'Donoghue B, Setzer S. Fast Alternating Direction Optimization Methods [J], *UCLA CAM Report* 12-35, 2012.
- [12] Van Loan C. The ubiquitous kronecker product [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 123(1-2): 85-100.
- [13] Yang J, Yin W, Zhang Y, et al. A fast algorithm for edge-preserving variational multichannel image restoration [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 569-592.
- [14] Geman D and Yang C. Nolinear image recovery with half-quadratic regularization [J]. *IEEE Transaction on Image Processing*, 4: 932-946, 1995
- [15] Banham M R and Katsaggelos A K. Digital image restoration [J], *IEEE Signal Processing Magazine*: 24-41, 1997.
- [16] <http://www.gastrolab.net/index.htm>